

Systèmes linéaires, polynômes, relations de comparaison

Durée : 4h. Calculatrices non autorisées. La clarté de la copie fera varier la note de ± 1 point.
Les questions simples doivent être traitées rapidement, ne perdez pas de temps au brouillon !

1 Inversibilité et puissances de matrices de taille 2

Pour tous $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, on pose $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2$.
- 2) En déduire que dans le cas $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et déterminer A^{-1} en fonction de a, b, c, d .
- 3) On suppose que $ad - bc = 0$. Montrer que A n'est pas inversible en raisonnant par l'absurde.
- 4) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$ pour deux réels α_n et β_n qu'on précisera.
On pourra dans un premier temps déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$.

2 Une équation polynomiale

On souhaite déterminer tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que

$$P(X)^2 + (1 - X^2)Q(X)^2 = 1 \quad (\star)$$

On raisonne par analyse-synthèse. On se donne une fois pour toutes un couple (P, Q) solution de $(\star)$.

On note n le degré de P .

- 1) Déterminer les couples (P, Q) solutions de $(\star)$ pour lesquels P est constant.

Dans la suite, on suppose que P n'est pas constant. On peut en particulier en déduire que Q est non nul.

- 2)
 - a) Montrer que Q divise PP' .
 - b) En déduire que Q divise P' .
 - c) Montrer que $\deg(Q) = n - 1$. En déduire que $Q = \lambda P'$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$.
- 3) On note à présent α le coefficient dominant de P et β celui de Q . Grâce aux carrés dans la relation $(\star)$, et quitte à remplacer Q par $-Q$, on peut supposer α et β de même signe.
 - a) Montrer que $\alpha = \beta$.
 - b) En déduire que $Q = \frac{1}{n}P'$, puis que

$$(1 - X^2)P'' - XP' + n^2P = 0$$

4) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(\theta) = P(\cos \theta)$.

- a) Montrer que f vérifie une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants, puis qu'il existe deux réels λ et μ tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$f(\theta) = \lambda \cos(n\theta) + \mu \sin(n\theta)$$

- b) Montrer que $\mu = 0$ et $\lambda \in \{-1, 1\}$.

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$, appelé le n -ième polynôme de Tchebychev, tel que

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta) \quad \text{pour tout } \theta \in \mathbb{R}.$$

- 5) a) Montrer que le couple $\left(T_n, \frac{1}{n}T'_n\right)$ est solution de $(\star)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Indication : on pourra montrer que le polynôme

$$R = T_n^2 + \frac{1}{n^2}(1 - X^2)(T'_n)^2 - 1$$

admet une infinité de racines.

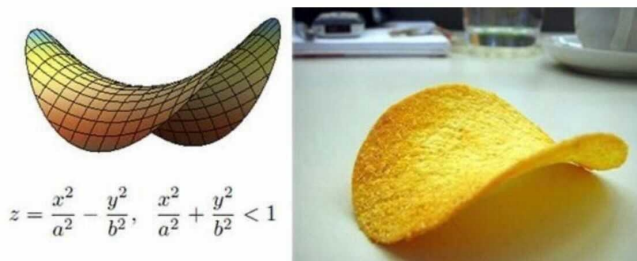
- b) Déterminer finalement toutes les solutions de $(\star)$. Justifier précisément.

The Pringle's chips shape is an engineering masterpiece

It is mathematically known as a hyperbolic paraboloid.

Advantages of the chips' saddle shape: (1) it is self-centering, hence easy to stack up, (2) it is impossible to predict how it will break up when you eat it, increasing the crunchy feeling and satisfaction

#innovation



sources : [reddit/mathmemes](#)